ทฤษฎีกราฟสำหรับวงจรไฟฟ้า

(Graph Theory for Electrical Circuits)

ธาดา คำแดง ศุภวัฒน์ ลาวัณย์วิสุทธิ์

สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศและการสื่อสาร

คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะแนะนำทฤษฎีกราฟที่เป็นหนึ่งในสาขาของคณิตศาสตร์ รวมถึงจะนำเสนอทฤษฎีกราฟในแง่มุมของการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า ซึ่งทฤษฎีกราฟในบทความนี้จะเป็นพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ และออกแบบวงจรไฟฟ้าที่มีความซับซ้อน

คำสืบค้น

ทฤษฎีกราฟ วงจรไฟฟ้า

1. บทนำ

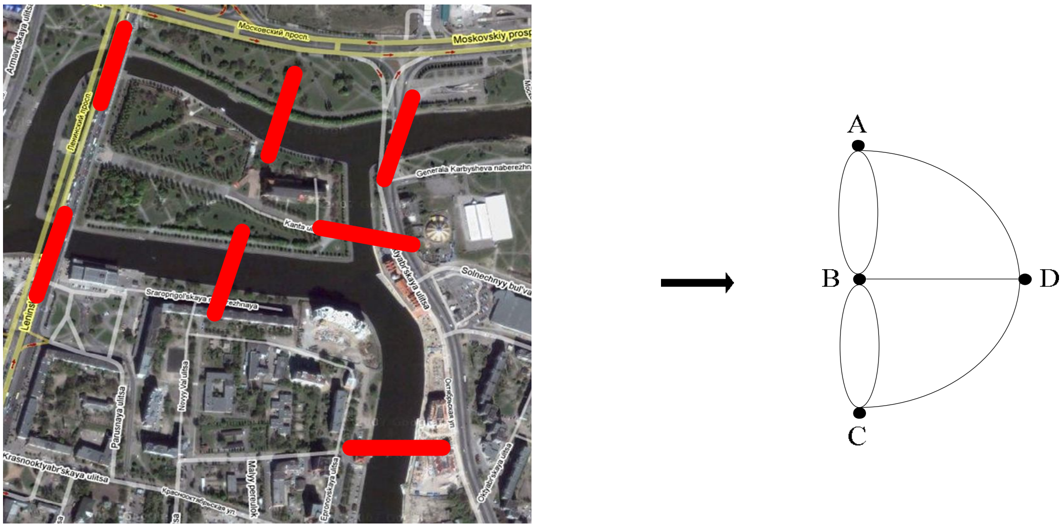
ถ้าจะกล่าวถึงผลงานตีพิมพ์ที่มีชื่อว่า "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" ในปี ค.ศ.1736 ถือได้ว่าเป็นงานชิ้นแรกในประวัติศาสตร์ที่นำเสนอทฤษฎีกราฟ (Graph theory) ซึ่งถูกนำเสนอโดย เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) เนื่องมาจาก เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ สนใจในเมืองเคอนิกส์แบร์ก (Koningsberg) หรือในปัจจุบันคือเมือง คาลินินกราด (Kaliningrad) ในประเทศรัสเซีย ซึ่งในเมืองนี้จะมีพื้นที่ที่เป็นเกาะ 2 เกาะ และมีสะพานข้ามทั้งหมด 7 สะพาน เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ เกิดคำถามขึ้นว่า "เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินข้ามสะพานทั้ง 7 แห่งโดยไม่ซ้ำกัน และสามารถกลับมาเริ่มที่จุดใหม่ได้" และ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ก็แสดงให้เห็นว่าไม่มีทางที่เดินข้ามสะพานทั้ง 7 สะพานได้ โดยไม่ซ้ำกัน หรืออีกชื่อหนึ่งของผลงานนี้ก็คือ "Seven Bridges of Königsberg" [1] ในการพิสูจน์ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้แปลงปัญหานี้ให้อยู่ในรูปทฤษฎีกราฟ โดยแทนที่ดินด้วยจุด ที่เรียกว่า จุดยอด (Vertices) และแทนสะพานด้วยเส้น ที่เรียกว่า เส้นเชื่อม (Edges) จากผลงานตีพิมพ์ชิ้นนี้ของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ทำให้ กอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ฟอน ไลบ์นิซ (Gottfried Wilhelm von Leibniz), อันเน ลุยลิเยร์ (Anne L'Huillier) รวมไปจนถึง ออกัสติน-หลุยส์ โคชี (Augustin-Louis Cauchy) สนใจที่จะศึกษาเรื่องของ จุดยอด เส้นเชื่อม และ พื้นผิว (Faces) ของวัตถุทางเรขาคณิตที่ประกอบด้วยหน้าเรียบและขอบตรง (Polyhedron) อีกทั้งจะกล่าวได้ว่า ทฤษฎีกราฟเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ทอพอโลยี (Topology) [2-3]

ในศตวรรษนั้นตั้งแต่ที่ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้ตีพิมพ์ผลงาน "Seven Bridges of Königsberg" ทำให้เกิดการศึกษาในเรื่อง คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์แขนงต่างๆ อีกมากมายเช่น ดิฟเฟอเรนเชียล แคลคูลัส (Differential calculus), เคมีทฤษฎี (Theoretical chemistry) ฯลฯ [4-6] และในปี ค.ศ. 1936 เดเนช โคนิก (Dénes König) ได้เขียนตำรา graph theory ขึ้นมาเป็นครั้งแรก [7] ต่อมา ค.ศ. 1969 แฟรงค์ ฮารี่รี (Frank Harary) ได้เขียนตำราเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลายศาสตร์ เช่น นักคณิตศาสตร์ นักเคมี วิศวกรไฟฟ้า และนักวิทยาศาสตร์ [8] หนึ่งในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีกราฟที่น่าสนใจโดย กุสตาฟ คีร์คฮอฟฟ์ ในปี ค.ศ. 1862 ได้เผยแพร่ผลงานที่รู้จักกันภายใต้ชื่อ กฎวงจรไฟฟ้าของคีร์คฮอฟฟ์ (Kirchhoff's Law) ที่แสดงความสัมพันธ์ของกระแสและความต่างศักย์บนกราฟที่แทนวงจรไฟฟ้า [9] รวมไปจนถึงงานทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า-อิเล็กทรอนิกส์ที่นำเอาทฤษฎีกราฟไปออกแบบลายวงจรพิมพ์ เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้จุดต่อข้าม (Jumpers) หรือการออกแบบลายวงจรแบบสองหน้า (Plated Through Hole) และการประมาณหาขนาดอัตราส ่วน W/L ของทรานซิสเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับการออกแบบวงจร เป็นต้น [10]

ในบทความนี้จะกล่าวถึงผลงานตีพิมพ์เรื่อง "Seven Bridges of Königsberg" เพื่อให้ทราบถึงหลักการและแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ รวมไปจนถึงการประยุกต์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าพื้นฐานไว้เป็นแนวทางให้ผู้ที่สนใจ สามารถนำเอาประยุกต์ใช้งานในด้านงานวิจัย ด้านการเรียนการสอน รวมไปจนถึงนักเรียน นักศึกษาเพื่อนำเอาความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟไปพัฒนา หรือประยุกต์ใช้งานทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า-อิเล็กทรอนิกส์

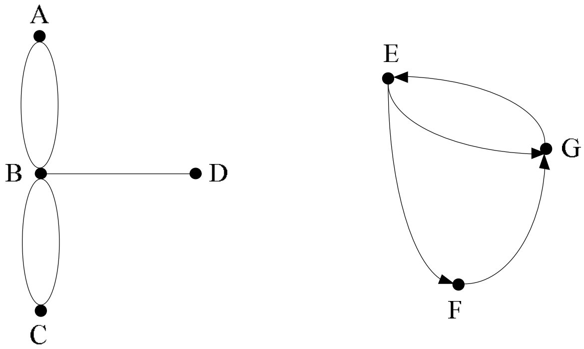
2. ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory)

ทฤษฎี (Theory) คือ สมมติฐานที่ได้รับการตรวจสอบหลายครั้งจนสามารถอธิบายข้อเท็จจริง คาดคะเน หรือทำนายเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์นั้นอย่างถูกต้อง และมีเหตุผลที่คนทั่วไปยอมรับ กล่าวให้เข้าใจง่ายๆ คือ ทฤษฎีสามารถเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการพิสูจน์ทฤษฎีของกราฟเพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎี จะพบว่ากราฟจะแสดงเป็นภาพ เพื่อที่จะแทนระบบใดๆ จาก “Seven Bridges of Königsberg” ในรูปที่ 1 [11]



รูปที่ 1 สะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก: Google Earth, สืบค้น ตุลาคม 27, 2556 [11]

และในการพิสูจน์ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้แปลงปัญหานี้ให้อยู่ในรูปทฤษฎีกราฟ โดยแทนที่ดินด้วยจุด ที่เรียกว่า จุดยอด และแทนสะพานด้วยเส้น ที่เรียกว่า เส้นเชื่อม ดังนั้นทฤษฎีของกราฟจะมีส่วนส่วนประกอบพื้นฐาน คือ จุดยอด, เส้นเชื่อม จุดยอดจะแสดงด้วยวงกลมทึบ และเส้นเชื่อมจะเป็นการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดยอด รูปที่ 2 (ก) จะเรียกว่ากราฟไม่มีทิศทาง (Undirected Graph) เพราะทุกจุดบนเส้นเชื่อมไม่ได้แสดงทิศทาง แต่ถ้าจุดบนเส้นเชื่อมแสดงในรูปที่ 2 (ข) จะเรียกว่ากราฟมีทิศทาง (Directed Graph)



(ก) (ข)

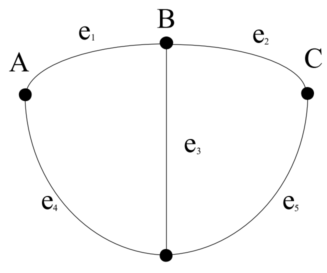
รูปที่ 2 ส่วนประกอบของ จุดยอด เส้นเชื่อม (ก) กราฟไม่มีทิศทาง (ข) กราฟมีทิศทาง

ทฤษฎีกราฟสามารถแสดงในทางคณิตศาสตร์โดย กราฟ G(V,E) ประกอบด้วย เซตจำกัด 2 เซต คือ เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอดแทนด้วยเซต V และจำนวนเส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่างจุดยอด แทนด้วยเซต E จากกราฟ G จะได้

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{e1, e2, e3, e4\}$$

และเมื่อกราฟ G (V,E) เป็นกราฟแบบไม่มีทิศทาง จุดยอด v และจุดยอด w ของกราฟ เป็นจุดยอดประชิด (Adjacent Vertices) ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง และเราเรียกจุดยอด v และ w ว่า จุดปลาย (End Point) ของเส้นเชื่อมดังนั้นหากแต่ละเส้นเชื่อม e ในเซตของ E เกิดกับ (Incident) จุดยอด v และ w สามารถแสดงได้ว่า e=(v,w) หรือ e=(w,v) แสดงในรูปที่ 3

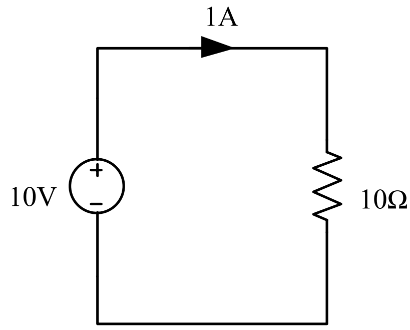


รูปที่ 3 ส่วนประกอบกราฟ G(V,E)

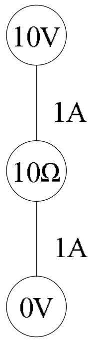
จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น กราฟ G (V,E) โดยที่ V={∞} และ E={∞} แต่ในบทความนี้จะกล่าวถึงกราฟที่มีจำนวนของซับเซต V และ E หรือ จำนวนของจุดยอดและเส้นเชื่อมที่มีจำนวนจำกัด เพราะสามารถที่จะเข้าใจได้ง่ายเหมาะสำหรับที่จะนำไปประยุกต์ใช้งานทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์

3. การประยุกต์ใช้งานกับวงจรไฟฟ้า (Applications to electrical circuits)

เมื่อจะกล่าวถึงการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า ทฤษฎีแรกในงานทางด้านนี้ที่จะต้องนึกถึงคงจะเป็นกฎของโอห์ม (Ohm of Law) รวมไปจนถึง กฎวงจรไฟฟ้าของคีร์คฮอฟฟ์ เมื่อสังเกตวงจรไฟฟ้าที่เป็นพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ประกอบด้วยตัวต้านทาน แหล่งจ่าย รวมไปจนถึงลายวงจร และจุดโหนด (Node) จะมีความคล้ายคลึงกันมากกับ จุดยอด และเส้นเชื่อมในทฤษฎีกราฟ แต่ความน่าสนใจคือเมื่อนำไปวงจรไฟฟ้าที่มีความซับซ้อน ไปเขียนเป็นกราฟแล้วนั้นจะแสดงให้เห็นว่าสิ่งที่หายไปคือจุดโหนด เส้นเชื่อมที่สามารถลากไปให้เป็นเส้นในแนวเดียวกัน ซึ่งจะสามารถลดความซับซ้อนในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า และการคำนวนที่ผิดพลาดที่เกิดจากการกำหนดจุดโหนด และทางเดินของกระแสในวงจรไฟฟ้าลงไปได้ รูปที่ 4 วงจรไฟฟ้าอย่างง่าย สามารถแสดงโดยใช้ทฤษฎีกราฟได้รูปที่ 5

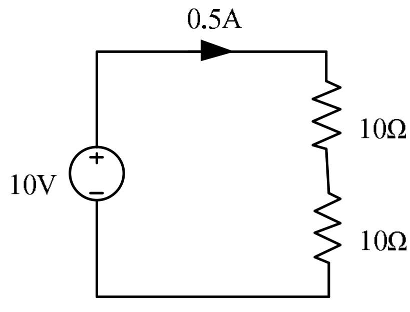


รูปที่ 4 วงจรไฟฟ้าที่ประกอบไปด้วยแหล่งจ่าย และตัวต้านทาน



รูปที่ 5 วงจรไฟฟ้าโดยใช้ทฤษฎีกราฟ

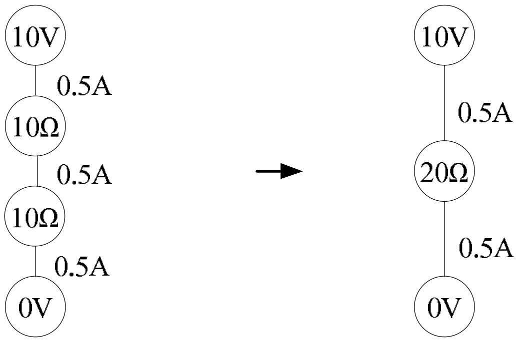
เมื่อนำวงจรมาเขียนอยู่ในรูปของกราฟขั้วของแหล่งจ่ายในทางไฟฟ้าจะมีสองขั้ว ดังนั้นเมื่อนำมาเขียนเป็นกราฟจึงจำเป็นที่จะต้องกำหนดจุดยอดให้กับแหล่งจ่ายทั้งสองขั้ว รวมไปถึงค่าความต้านทาน และกระแสได้ถูกกำหนดให้ไหลบนเส้นเชื่อม แสดงในรูปที่ 5 แต่เมื่อสังเกตุจากวงจรว่าการเขียนในรูปกราฟง่ายกว่าการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าโดยใช้ กฎของโอห์ม หรือกฎวงจรไฟฟ้าของคีร์คฮอฟฟ์ อย่างไรเนื่องจากวงจรในรูปที่ 5 เป็นวงจรที่ไม่ซับซ้อนและไม่จุดโหนด ประโยชน์ของทฤษฎีกราฟจะมีประโยชน์เมื่อวงจรมีโหนดจำนวนมาก ซึ่งจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไป



รูปที่ 6 วงจรอนุกรม

3.1 วงจรอนุกรม

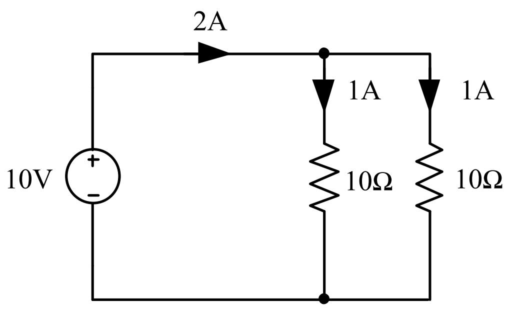
วงจรอนุกรม คือการนำโหลดมาต่อเรียงกันโดยให้ปลายของโหลดตัวแรกต่อกับต้นของโหลดตัวถัดไป หรืออีกนัยหนึ่งหมายถึงการนำโหลดตั้งแต่สองตัวมาต่อเรียงกันไปแบบอันดับทำให้กระแสไหลทิศทางเดียวกัน แสดงในรูปที่ 6 จากหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วในข้างต้น สามารถเขียนให้เป็นรูปของกราฟได้ดังรูปที่ 7



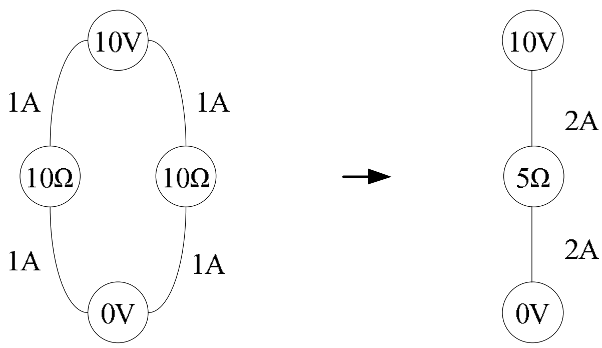
รูปที่ 7 วงจรอนุกรมโดยใช้ทฤษฎีกราฟ

3.2 วงจรขนาน

วงจรขนาน คือการนำโหลดมาต่อขนานกันหรือต่อคร่อมกันตั้งแต่สองตัวขึ้นไปโดยนำจุดต่อของปลายทั้งสองข้างของโหลดแต่ละตัวมารวมกันทำให้กระแสแยกตามสาขา แสดงในรูปที่ 8



รูปที่ 8 วงจรขนาน

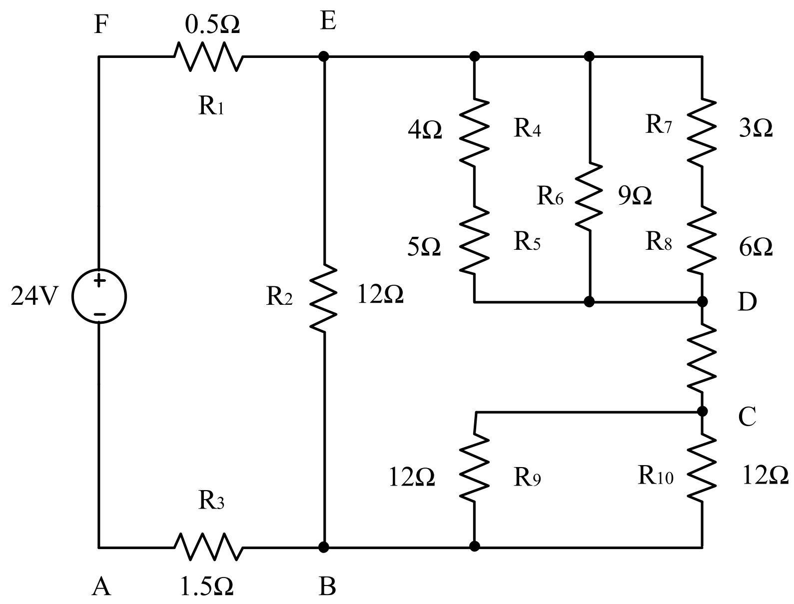


รูปที่ 9 วงจรขนานโดยใช้ทฤษฎีกราฟ

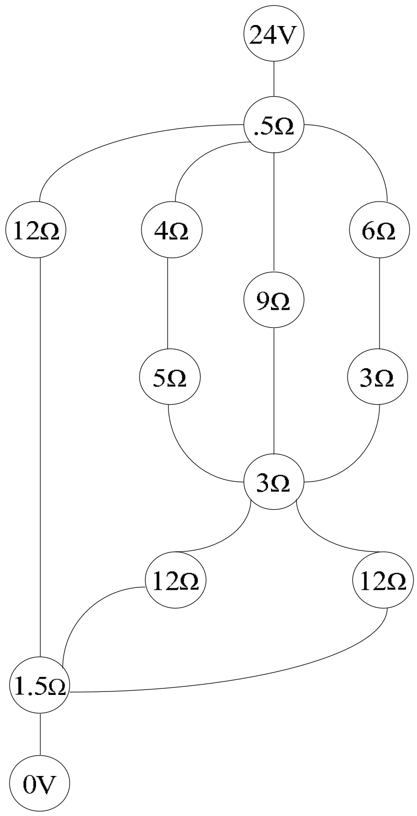
เมื่อหาความต้านทานรวมของตัวต้านทาน 10Ω ทั้งสองตัวสามารถใช้หลักตัวต้านทานขนานกันได้ให้เหลือ 5Ω สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของกราฟ แสดงในรูปที่ 9

3.3 วงจรผสม

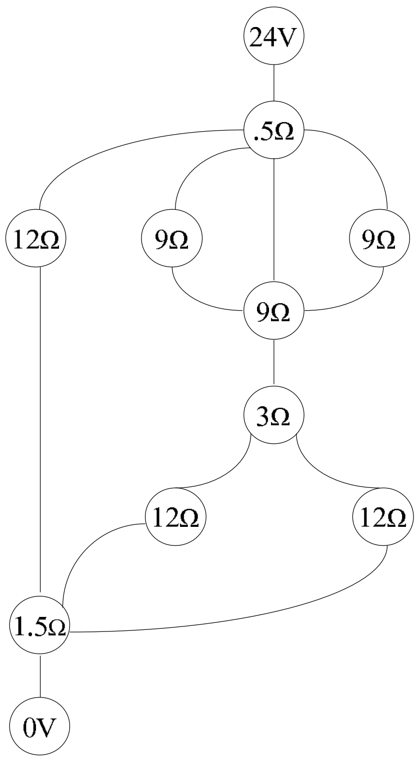
วงจรผสมคือวงจรที่นำเอาการต่อรวมทั้งอนุกรม และขนานเข้าด้วยกัน แสดงในรูปที่ 10 จากรูป เมื่อวงจรต่อร่วมกันในลักษณะผสมจะทำให้วงกรเกิดโหนด หรือจุดต่อร่วมภายในวงจร และยุ่งยากเกินไปสำหรับที่จะใช้กฎของโอห์ม รวมไปจนถึง กฎวงจรไฟฟ้าของคีร์คฮอฟฟ์ (Kirchhoff's Law) ซึ่งจะทำให้เกิดสมการขึ้นหลายสมการ และเมื่อนำมาวิเคราะห์แล้วอาจจะเกิดความผิดพลาดได้ง่าย จากหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วในข้างต้นสามารถเขียนให้เป็นรูปของกราฟแสดงในรูปที่ 11(ก)



รูปที่ 10 วงจรผสม

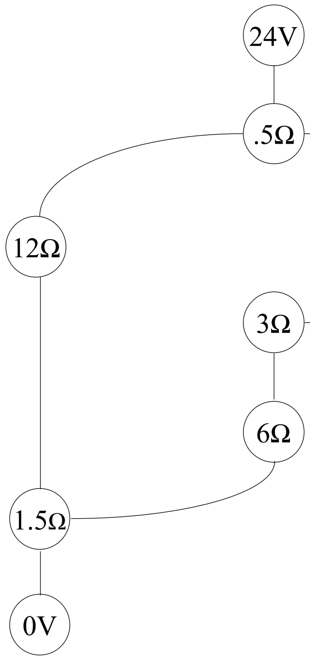

24V
.5Ω
12Ω
4Ω
6Ω
9Ω
5Ω
3Ω
3Ω
12Ω
12Ω
1.5Ω
0V

(ก)


24V
.5Ω
12Ω
9Ω
9Ω
9Ω
3Ω
12Ω
12Ω
1.5Ω
0V

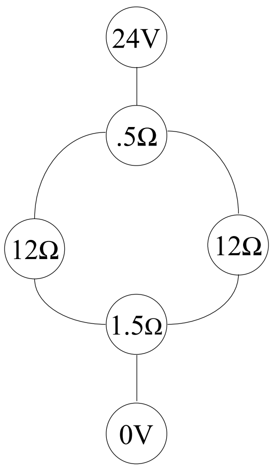
(ข)

ในขั้นตอนแรกโดยอาศัยหลักการของการอนุกรมของตัวต้านทาน 4Ω, 5Ω และ 6Ω, 3Ω จะเหลือความต้านทานรวม 9Ω สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของกราฟได้ แสดงในรูปที่ 11(ข)

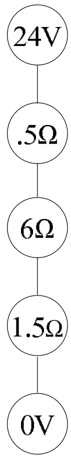


(ค)

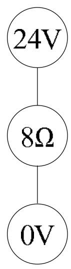
ในรูปที่ 11(ข) เมื่อสังเกตุพบว่าสามารถที่จะยุบรวมตัวต้านทาน 9Ω ที่ขนานกันทั้ง 3 ตัวมีค่าความต้านทานรวมเท่ากับ 3Ω แสดงได้ในรูปที่ 11(ค) ต่อมาจากหลักการอนุกรมกันของตัวต้านจากรูปที่ 11(ค) สามารถที่จะหาค่าความต้านทานรวมของตัวต้านทาน 3Ω, 3Ω และ 6Ω เท่ากับ 12Ω แสดงได้ในรูปที่ 11(ง)



(ง)



(จ)



(ฉ)

รูปที่ 11 วงจรผสมโดยใช้ทฤษฎีกราฟ

จากขั้นตอนการยุบรวมตัวต้านทานโดยอาศัยหลักการของทฤษฎีกราฟในรูปที่ 11(ก) – 11(ง) จะสังเกตุว่าจากวงจรผสมที่มีความซับซ้อน ทฤษฎีกราฟจะสามารถยุบวงจรให้มีความซับซ้อนได้เช่นเดียวกับกฎของโอห์ม รวมไปจนถึงกฎวงจรไฟฟ้าของคีร์คฮอฟฟ์ แต่ในทฤษฎีกราฟจะแสดงให้เห็นถึงการวิเคราะห์วงจรที่ปราศจากจุดโหนด และสามารถลดความซับซ้อนของวงจรไปได้ ซึ่งสามารถแสดงได้ในรูปที่ 11(จ) และสุดท้ายโดยใช้หลักการของวงจรอนุกรมค่าความต้านทาน 0.5Ω, 6Ω และ 1.5Ω เท่ากับ 8Ω แสดงได้ในรูปที่ 11(ฉ)

4. สรุป

ในบทความนี้ได้พยายามชี้ให้เห็นถึงหลักการเบื้องต้นสำหรับการประยุกต์ใช้ทฤษฎีกราฟสำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า เพื่อให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจและเห็นมุมมองที่แตกต่างออกไปจากการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าทั่วไป ซึ่งอาจจะนำไปสู่การประยุกต์ใช้งานกับวงจรที่มีความซับซ้อนสูงกว่านี้ และในเรื่องของการออกแบบที่ได้กล่าวไปแล้วในส่วนของบทนำ รวมไปจนถึงความคิดสร้างสรรค์ที่อาจจะนำทฤษฎีกราฟไปใช้กับงานทางด้านอื่นๆ อีกมากมาย

บรรณานุกรม

[1] Biggs, N.; Lloyd, E. and Wilson, R. (1986), Graph Theory, 1736-1936, Oxford University Press

[2] Cauchy, A.L. (1813), "Recherche sur les polyèdres - premier mémoire", Journal de l'École Polytechnique, 9 (Cahier 16): 66–86.

[3] L'Huillier, S.-A.-J. (1861), "Mémoire sur la polyèdrométrie", Annales de Mathématiques 3: 169–189.

[4] Cayley, A. (1857), "On the theory of the analytical forms called trees", Philosophical Magazine, Series IV 13 (85): 172–176, doi:10.1017/CBO9780511703690.046.

[5] Cayley, A. (1875), "Ueber die Analytischen Figuren, welche in der Mathematik Bäume genannt werden und ihre Anwendung auf die Theorie chemischer Verbindungen", Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft 8 (2): 1056–1059, doi:10.1002/cber.18750080252.

[6] John Joseph Sylvester (1878), Chemistry and Algebra. Nature, volume 17, page 284. doi: 10.1038/017284a0. Online version, Retrieved 2009-12-30.

[7] Tutte, W.T. (2001), Graph Theory, Cambridge University Press, p. 30, ISBN 978-0-521-79489-3.

[8] Gardner, Martin (1992), Fractal Music, Hypercards, and more…Mathematical Recreations from Scientific American, W. H. Freeman and Company, p. 203.

[9] Kirchhoff, Gustav (1860). "Ueber die Fraunhoferschen Linien". Monatsberichte, Akademie der Wissenschaften, Berlin: 662–665. ISBN 978-1-113-39933-5. HathiTrust full text. Partial English translation available in Magie, William Francis, A Source Book in Physics (1963). Cambridge: Harvard UP. p. 354-360.

[10] Emmanuel A. Gonzalez, “Introductory Graph Theory for Electrical and Electronics Engineers” IEEE Multidisciplinary Engineering Education Magazine, Vol. 2, No. 2, June 2007

[11] https://www.google.com/maps/preview#!data=!1m4!1m3!1d4610!2d20.5112564!3d54.
706384!2m1!1e3&fid=7